

文章编号: 1000-8055(2010)12-2807-04

Weibull 分布定时无失效数据可靠性分析方法

傅惠民, 张勇波

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100191)

摘 要: 定时无失效数据的处理是当前工程中亟需解决的问题. 为此, 提出一种 Weibull 分布定时无失效数据可靠性分析方法, 在形状参数下限已知的情况下, 给出了可靠度和使用寿命的单侧置信下限, 从而能够根据定时无失效数据对产品进行高置信水平的可靠性评定. 大量 Monte Carlo 模拟验证结果表明, 该方法既可以充分利用定时无失效数据, 又能对 Weibull 分布无失效数据进行累加, 所以增大了信息量, 提高了预测精度. 文中给出某型号高压容器定时无失效寿命试验数据的计算实例.

关 键 词: Weibull 分布; 定时无失效数据; 寿命预测; 可靠性评估; 置信限

中图分类号: TB301; O211

文献标识码: A

Method of reliability analysis for time truncated zero-failure data based on Weibull distribution

FU Hui-min, ZHANG Yong-bo

(Research Center of Small Sample Technology,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: It is an outstanding problem in engineering application to solve problems related to time truncated zero-failure data. In this paper, a method of reliability analysis for time truncated zero-failure data based on Weibull distribution was presented, which can making an high confidence assessment for the reliability of product with time truncated zero-failure data when the lower limit of shape parameter and the one-side lower confidence limits of reliability and life were provided. Large mount of Monte Carlo simulation results show that this method can combine the zero-failure data that contributing to Weibull distribution together and make full use of information of time truncated zero-failure data, the precision of forecasting is obviously improved. The method introduced in this paper was used for analyzing the time truncated zero-failure data provide by the life test of one kind of high pressure vessel.

Key words: Weibull distribution; time truncated zero-failure data; life forecasting; reliability assessment; confidence limits

定时截尾寿命试验是一种常见的寿命试验方法, 对试验中出现失效数据情况, 已有不少统计方法可以进行各种参数的估计^[1-10]. 但是, 随着科学

技术的发展, 产品服役时间的延长和可靠性的提高, 定时截尾寿命试验中出现了大量的无失效数据, 即无一试样失效的情况. 传统的处理定时截尾

收稿日期: 2010-07-09; 修订日期: 2010-09-07

基金项目: 国家自然科学基金(10472006); 北京市教育委员会共建项目(XK100060418)

作者简介: 傅惠民(1956—), 男, 浙江遂昌人, “长江学者”特聘教授, 博士, 从事小样本信息技术、软校准技术、数据融合方法及可靠性研究.

数据的统计方法已经不能满足需求. 为此, 文献[10]建立一种正态分布定时无失效数据可靠性分析方法, 能够在正态分布情况下根据定时无失效数据进行可靠性分析和寿命预测. 本文进一步对两参数 Weibull 分布的情况进行研究. 由于根据定时无失效数据难以求得两参数 Weibull 分布的形状参数, 给产品的可靠性分析带来困难. 但是, 对于 Weibull 分布形状参数 α 的下限 α_0 , 波音公司已通过对大量试验数据的统计分析, 得到如下结论: 对于铝合金结构形状参数下限值 α_0 一般取 4, 对于钛合金结构一般取 3, 而钢结构一般取 2. 因此, 本文在形状参数下限已知的条件下, 提出一种定时无失效数据可靠性分析方法, 给出了产品使用寿命和可靠度的单侧置信下限, 解决了 Weibull 分布定时无失效数据可靠性分析难题.

1 指数分布定时无失效数据的可靠性分析

从一批产品中任取 n 个进行定时截尾试验, 在规定的时间内所有产品均未失效. 设产品寿命 t 服从指数分布

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\frac{t}{\theta}\right\} \quad (1)$$

式中 θ 为平均寿命, 则其可靠寿命 t_R 和可靠度 R 的置信水平为 γ 的单侧置信下限分别由下面两式给出

$$t_{R_{\text{low}}} = (n+1)t_0 \frac{\ln R}{\ln(1-\gamma)} \quad (2)$$

$$R_{\text{low}} = \exp\left\{\frac{t \ln(1-\gamma)}{(n+1)t_0}\right\} \quad (3)$$

证明: 根据文献[11]可知, 在 t_0 处的可靠度 R_0 的置信水平为 γ 的单侧置信下限 $R_{0\text{low}}$ 为

$$R_{0\text{low}} = (1-\gamma)^{\frac{1}{n+1}} \quad (4)$$

即

$$P\{R_{0\text{low}} \leq R_0\} = \gamma \quad (5)$$

所以

$$P\{(1-\gamma)^{\frac{1}{n+1}} \leq e^{-\frac{t_0}{\theta}}\} = \gamma \quad (6)$$

$$P\left\{\theta \geq -\frac{(n+1)t_0}{\ln(1-\gamma)}\right\} = \gamma \quad (7)$$

即平均寿命 θ 的置信水平为 γ 的单侧置信下限 θ_{low} 为

$$\theta_{\text{low}} = -\frac{(n+1)t_0}{\ln(1-\gamma)} \quad (8)$$

由此得到可靠寿命 t_R 和可靠度 R 的置信水平为 γ 的单侧置信下限为

$$t_{R_{\text{low}}} = -\theta_{\text{low}} \ln R = (n+1)t_0 \frac{\ln R}{\ln(1-\gamma)} \quad (9)$$

$$R_{\text{low}} = \exp\left\{-\frac{t}{\theta_{\text{low}}}\right\} = \exp\left\{\frac{t \ln(1-\gamma)}{(n+1)t_0}\right\} \quad (10)$$

式(2)与式(3)证毕.

2 Weibull 分布定时无失效数据的可靠性分析

从一批产品中任取 n 个进行定时截尾试验, 在规定的时间内所有产品均未失效. 设产品寿命 t 服从 Weibull 分布

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right\} \quad (11)$$

式中 α 为形状参数, β 为尺度参数. 当 α 已知时, $Z = T^\alpha$ 遵从参数为 $\theta = \beta^\alpha$ 的指数分布^[12]. 因此, 根据式(4)求得 β 的单侧置信下限 $\beta_{\text{low}}^\alpha$ 为

$$\beta_{\text{low}}^\alpha = -\frac{(n+1)t_0^\alpha}{\ln(1-\gamma)} \quad (12)$$

2.1 可靠寿命置信下限

当 α 已知时, 由式(12)可以进一步求得可靠寿命 t_R 的置信水平为 γ 的单侧置信下限为

$$t_{R_{\text{low}}} = t_0 \left[(n+1) \frac{\ln R}{\ln(1-\gamma)} \right]^{1/\alpha} \quad (13)$$

当只知道形状参数 α 的下限 α_0 时, 即 $\alpha \geq \alpha_0$, 对于给定的可靠度 R , 若满足条件

$$R \geq (1-\gamma)^{\frac{1}{n+1}} \quad (14)$$

则可靠寿命 t_R 的置信水平为 γ 的单侧置信下限可由下式给出

$$t_{R_{\text{low}}}^* = t_0 \left[(n+1) \frac{\ln R}{\ln(1-\gamma)} \right]^{1/\alpha_0} \quad (15)$$

证明: 对于式(14)给出的条件, 不等式两边取对数可得

$$(n+1) \frac{\ln R}{\ln(1-\gamma)} \leq 1 \quad (16)$$

进而

$$\ln \left[(n+1) \frac{\ln R}{\ln(1-\gamma)} \right] \leq 0 \quad (17)$$

同时, 对式(13)给出的可靠寿命 t_R 的置信水平为 γ 的单侧置信下限 $t_{R_{\text{low}}}$ 取对数有

$$\ln t_{\text{Rlow}} = \ln t_0 + \frac{1}{\alpha} \ln \left[(n+1) \frac{\ln R}{\ln(1-\gamma)} \right] \quad (18)$$

对 α 求偏导可得

$$\frac{\partial \ln t_{\text{Rlow}}}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha^2} \ln \left[(n+1) \frac{\ln R}{\ln(1-\gamma)} \right] \quad (19)$$

代入式(17)可得到

$$\frac{\partial \ln t_{\text{Rlow}}}{\partial \alpha} \geq 0 \quad (20)$$

即 t_{Rlow} 为 α 的单调增函数. 所以, 当已知 $\alpha \geq \alpha_0$ 时, 有

$$t_{\text{Rlow}}^* \leq t_{\text{Rlow}} \quad (21)$$

即

$$P\{t_R \geq t_{\text{Rlow}}^*\} \geq P\{t_R \geq t_{\text{Rlow}}\} = \gamma \quad (22)$$

由此可知, 当满足式(14)条件时, 可靠寿命 t_R 的置信水平为 γ 的单侧置信下限为 t_{Rlow}^* , 证毕.

2.2 可靠度置信下限

同理, 当形状参数 α 已知时, 对于给定的寿命 t , 其可靠度 R 的置信水平为 γ 的单侧置信下限为

$$R_{\text{low}} = \exp \left\{ \frac{\ln(1-\gamma)}{n+1} \left(\frac{t}{t_0} \right)^\alpha \right\} \quad (23)$$

当只知道形状参数 α 的下限 α_0 时, 即 $\alpha \geq \alpha_0$, 对于给定的寿命 t , 若满足条件

$$t \leq t_0 \quad (24)$$

则可靠度 R 的置信水平为 γ 的单侧置信下限可由下式给出

$$R_{\text{low}}^* = \exp \left\{ \frac{\ln(1-\gamma)}{n+1} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\alpha_0} \right\} \quad (25)$$

证明: 对于式(24)给出的条件, 不等式两边取对数可得

$$\ln t - \ln t_0 \leq 0 \quad (26)$$

同时, 对式(23)给出的可靠度 R 的置信水平为 γ 的单侧置信下限 R_{low} 取对数有

$$\ln R_{\text{low}} = \frac{\ln(1-\gamma)}{n+1} \left(\frac{t}{t_0} \right)^\alpha \quad (27)$$

对 α 求偏导可得

$$\frac{\partial \ln R_{\text{low}}}{\partial \alpha} = \frac{\ln(1-\gamma)}{n+1} \left(\frac{t}{t_0} \right)^\alpha (\ln t - \ln t_0) \quad (28)$$

代入式(26)可得到

$$\frac{\partial \ln R_{\text{low}}}{\partial \alpha} \geq 0 \quad (29)$$

即 R_{low} 为 α 的单调增函数. 所以, 当已知 $\alpha \geq \alpha_0$ 时, 有

$$R_{\text{low}}^* \leq R_{\text{low}} \quad (30)$$

即

$$P\{R \geq R_{\text{low}}^*\} \geq P\{R \geq R_{\text{low}}\} = \gamma \quad (31)$$

由此可知, 当满足式(24)条件时, 可靠度 R 的置信水平为 γ 的单侧置信下限为 R_{low}^* , 证毕.

3 实 例

某型号高压容器同批次抽取 4 只进行 0~47 MPa 疲劳试验, 其试验数据列于表 1. 现要求该高压容器置信水平 $\gamma=0.9$, 对应充装次数 $t=20$ 万次的可靠度置信下限, 以及可靠度 $R=0.999999$ 时的充装次数置信下限.

表 1 某型号高压容器定时无失效寿命试验数据
Table 1 Zero-failure data of high pressure vessel

序号 i	中止次数/万次 Suspended times T_i
1	>200
2	>200
3	>200
4	>200

该高压容器寿命服从两参数 Weibull 分布, 失效模式表现为铝合金内衬的破坏, 所以, 取 $\alpha_0=4$, 由于 $t_0=200$, $t=20$, 满足式(24)条件

$$t = 20 \leq t_0 = 200$$

因此, 根据式(25)可以求得该高压容器对应充装次数为 20 万次的置信水平为 0.9 的可靠度置信下限为

$$R_{\text{low}}^* = \exp \left\{ \frac{\ln(1-\gamma)}{n+1} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\alpha_0} \right\} = 0.999998$$

对于给定的置信水平 $\gamma=0.9$ 和可靠度 $R=0.999999$, 满足式(14)条件

$$R = 0.999999 \geq (1-\gamma)^{\frac{1}{m+1}} = 0.63$$

因此, 根据式(15)可以求得该高压容器对应于可靠度 $R=0.999999$ 的置信水平为 0.9 的寿命置信下限为

$$t_{\text{Rlow}}^* = t_0 \left[(n+1) \frac{\ln R}{\ln(1-\gamma)} \right]^{1/\alpha_0} = 7 \text{ (万次)}$$

3 结 论

1) 由于定时无失效数据是人为中止其试验, 所以这种数据不包含寿命分散性的正确信息, 因而就无法根据定时无失效数据求得 Weibull 分布形状参数。

2) 工程实际中, 虽然 Weibull 分布形状参数是未知的, 但是可以根据以往积累的大量统计资料得到 Weibull 形状参数的下限值。

3) 在 Weibull 分布形状参数下限值 α_0 已知的情况下, 提出一种定时无失效数据可靠性分析方法, 给出了产品使用寿命和可靠度的单侧置信下限。

4) 本文方法既能充分利用定时无失效数据的寿命信息, 又能发挥 Weibull 分布无失效数据可以累加的优点。

5) 本文方法计算简单, 便于工程应用。

参考文献:

- [1] 茆诗松, 王玲玲. 加速寿命试验[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
MAO Shisong, WANG Lingling. Accelerated life testing [M]. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese)
- [2] 王玲玲, 陈元. 对数正态分布定时截尾样本下的寿命试验与加速寿命试验的统计分析[J]. 应用数学学报, 1994, 17(1): 109-117.
WANG Lingling, CHEN Yuan. Statistical analysis of life test and accelerated life test under type I censoring of lognormal distribution[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1994, 17(1): 109-117. (in Chinese)
- [3] 张志华. 对数正态分布定时截尾样本下加速寿命试验的统计分析[J]. 应用数学学报, 2000, 23(4): 488-496.
ZHANG Zhihua. Statistical analysis of accelerated life test on lognormal distribution case under type I censoring [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2000, 23(4): 488-496. (in Chinese)
- [4] 徐晓岭. 定数截尾缺失数据下 Weibull 分布的统计推断[J]. 数理统计与应用概率, 1997, 12(4): 363-370.
XU Xiaoling. Statistical inference for weibull distribution under type II censoring[J]. Mathematical Statistics and Applied Probability, 1997, 12(4): 363-370. (in Chinese)
- [5] 田霆, 刘次华. 定时截尾缺失数据下指数分布的参数 AM-LE[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2006, 27(4): 351-353.
TIAN Ting, LIU Cihua. AMLE for the parameter of exponential distribution under multiply type I censoring[J]. Journal of Huaqiao University(Natural Science), 2006, 27(4): 351-353. (in Chinese)
- [6] 叶尔骅, 吴清太. 双参数指数分布下定时截尾恒加试验的统计分析[J]. 南京航空航天大学学报, 1994, 26(1): 96-103.
YE Erhua, WU Qingtai. Statistical analysis of type I censoring data from constant-stress accelerated life testing method under the two parameter exponential distribution [J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 1994, 26(1): 96-103. (in Chinese)
- [7] 王炳兴, 王玲玲. 定时截尾下指数分布的修正最大似然估计[J]. 高校应用数学学报, 1995(3): 295-302.
WANG Bingxing, WANG Lingling. The modified maximum likelihood estimation for the exponential distribution under type I censoring[J]. Applied Mathematica Journal of Chinese Universities, 1995(3): 295-302. (in Chinese)
- [8] 翟伟丽, 茆诗松. 定时截尾场合下双参数指数分布的参数估计[J]. 应用概率统计, 2002, 18(2): 197-204.
ZHAI Weili, MAO Shisong. Parameter estimation of exponential distribution with two parameters under type I censoring sample[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2002, 18(2): 197-204. (in Chinese)
- [9] 张志华. 定时随机截尾数据情况下 Weibull 分布参数的矩估计[J]. 工程数学学报, 2000, 17(3): 43-49.
ZHANG Zhihua. Moment estimation of weibull distribution under type I random censorship[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2000, 17(3): 43-49. (in Chinese)
- [10] 傅惠民, 张勇波. 正态分布定时无失效数据可靠性分析方法[J]. 航空动力学报, 2010, 25(2): 384-387.
FU Huimin, ZHANG Yongbo. Method of reliability analysis for time truncated zero-failure data based on normal distribution[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(2): 384-387. (in Chinese)
- [11] 傅惠民. 不完全数据秩分布理论[J]. 航空学报, 1993, 14(11): A578-A584.
FU Huimin. Theory of incomplete data rank distributions [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1993, 14(11): A578-A584. (in Chinese)
- [12] 戴树森, 费鹤良, 王玲玲. 可靠性试验及其统计分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 1983.
DAI Shusen, FEI Heliang, WANG Lingling. Reliability test and statistical analysis[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1983. (in Chinese)